Fra Hr. Prof. Lewy.

Mémoire sur la composition de l'air confiné dans la terre végétale par M. M. Boussingault et Lewy. Extrait des annales de chimie et de physique 3 serie, tome XXXVII. Paris 1853.

Fra Hr. Dr. Hannover.

On the construction and use of the microscope by Dr. Hannover. Edinburgh 1853.

Mödet den 3$^{\text{die}}$ Juni.

Hr. Oberstlieutenant *Andræ* meddeelte fölgende Bemærkninger:

Om de projective Forvandlinger, ved hvilke Fladeindholdene bevares uforandrede.

Af de projective Forvandlinger, som fremstaae, naar en given Overflades Punkter overföres paa en anden given Overflade efter en vis bestemt Lov, have hidtil kun ganske enkelte været Gjenstand for mathematisk Behandling. De herhen hörende Undersögelser ere næsten alle fremkaldte ved specielle Problemer, der angaae den sphæriske og den sphæroidiske Flades plane Afbildninger, eller de saakaldte Kaartprojectioner. En fuldkommen Afbildning, det vil sige en saadan, hvor hvilkesomhelst Dele af Billedet ere ligedannede med de tilsvarende Dele af det Afbildede, er som bekjendt kun mulig paa Flader, der enten selv ere ligedannede med den afbildede Overflade, eller ved Böining kunne bringes til at blive det. Da nu Planen ved Böining kun kan frembringe Flader, der ere udfoldelige, og da hverken den sphæriske eller den sphæroidiske henhöre til denne Klasse, saa har man fölgelig stedse ved plane Kaarter, der skulle fremstille Billeder af Himmelkuglen eller af Jordoverfladen, maattet gjöre Brug af projective Forvandlinger, som medförte mere eller mindre væsentlige Forvanskninger. Kaartprojectionernes Theorie bör vise, hvorledes de forskjellige Projectionsmaader betinges af de Egenskaber, Fremstillingen maa besidde for at fyldestgjöre visse særlige Formaal, og den bör tillige, hvor Opgaven er ubestemt, give alle de mulige Lösninger, mellem hvilke Valget maa bestemmes ved en yderligere Tilföielse af nye Betingelser.

Det er imidlertid langtfra, at en saadan Theorie kan siges for Öieblikket at være tilveiebragt. Med Undtagelse af Sökaartene, eller Kaartene med de saakaldte voxende Breder, der frembyde et smukt, men næsten enestaaende Exempel paa en fuldstændig Lösning af et specielt Problem, skylde den langt större Deel af de ældre Constructioner som oftest ganske uvæsentlige eller dog underordnede Hensyn deres Tilblivelse. Den stereographiske Projection, der er den ældste af alle og endnu i vore Dage en af de mest udbredte, har saaledes oprindeligt kun tildraget sig Opmærksomheden, fordi den gjengav den sphæriske Flades Meridianer og Paralleller ved de simpleste af alle Curver, nemlig ved den rette Linie og Cirkelen. Det er denne Egenskab, som allerede *Ptolemæus* fremhæver, og det er ogsaa kun denne alene, der har givet de herhen hörende Constructioner en saa udbredt Anvendelse. Og dog er den stereographiske Projection i Besiddelse af en anden, ganske anderledes charakteristisk og for den billedlige Fremstilling væsentlig Egenskab, den nemlig, at bevare i Billedets mindste Dele en fuldstændig Ligedannethed med det Afbildede. Uagtet man nu med störste Lethed kan eftervise denne mærkelige Egenskab, saa er dog Opdagelsen heraf först gjort i det forrige Aarhundrede, fra hvilket man vel overhovedet maa datere den mere videnskabelige Behandling af Kaartprojectionerne.

Det förste Forsög paa at udkaste Grundtrækkene af en omfattende og almindelig Theorie skyldes *Lambert.* I en meget mærkelig Afhandling: „Anmerkungen zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten", som findes i det 1772 udkomne 3die Bind af: „Beyträge zum Gebrauche der Mathematik", fremstiller denne berömte Mathematiker Opgaven i dens hele Almindelighed og gjennemgaaer en stor Deel af de vigtigste Problemer, idet han tillige ved en Række af Exempler viser, hvorledes de i enkelte givne Tilfælde kunne löses. Det er imidlertid dog især eet Problem, men rigtignok eet af de allervigtigste, ved hvilket han dvæler med stor Forkjærlighed, det nemlig, at frembringe Afbildninger, som i deres mindste Dele ere ligedannede med det Afbildede. Af dette Problem gives en almindelig Lösning og det vises, at den stereographiske og den Mercatorske Projection ere indbefattede i denne. Ved *Lambert's* Arbeider vaktes Mathematikernes Interesse for denne Art af Undersögelser. Allerede i 1777 findes en Afhandling af *Euler* i Petersborger-Academiets Memoirer, som behandler det samme Problem og i det Væsentlige indskrænker sig til Udledelsen af de samme Resultater. Derimod förtes Sagen et betydeligt Skridt fremad ved to berömte Afhandlinger af *Lagrange* i Berliner Academiets Memoirer for 1779. Uagtet disse Afhandlinger benævnes: „Recherches sur la construction des cartes géographiques", er det dog kun igjen det tidligere af *Lambert* paapegede Problem, som saa at sige udelukkende behandles. *Lagrange* giver Lösningen i en anden og smukkere Form, og udvikler tillige alle de Tilfælde, i hvilke Meridianerne og Parallellerne kunne fremstilles ved Cirkler. Af andre og senere Arbeider skal jeg endnu kun fremhæve eet, som vel maa antages at have fuldendt denne Deel af Projectionernes Theorie, hvilken tillige derved har erholdt en Udvidelse, der förer den langt ud over de tidligere afstukne Grændser. Jeg behöver neppe at tilföie, at jeg herved sigter til den af *Gauss* givne Besvarelse af Selskabets mathematiske Priisopgave for Aaret 1822, som senere, under Titelen: „Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird" er bleven offentliggjort i 3die Hefte af *Schumacher's* „Astronomische Abhandlungen".

Medens en enkelt Projectionsmaade saaledes gjentagne Gange er bleven underkastet en omfattende mathematisk Undersögelse, maa det vistnok vække Forundring, at ingen af alle de övrige Projectioner er gjort til Gjenstand for en lignende Behandling. Og dog findes der blandt disse adskillige, som i flere Henseender fortjene Opmærksomhed, og der gives i hvert Fald een, som indtager en fuldkommen sideordnet Plads med den behandlede, den nemlig, hvor hvilkesomhelst Dele af Billedet gjengive de afbildede Fladeindhold med uforandret Störrelse. Principet for denne Projection findes gjennemfört ved mangfoldige Kaartconstructioner ligefra de bekjendte Flamsted'ske Himmelkaart til de nyeste og störste topographiske Værker. Det er saaledes en Construction af den betegnede Art, der bruges ved det berömteste af alle Kaartværker, det endnu ikke fuldendte Frankrigs Kaart, som udgives af den franske Generalstab, og det er ogsaa den samme Construction, der anvendes ved de nye af den danske Generalstab bearbeidede Kaart over Danmark. Uagtet nu disse specielle Constructioner ofte ere mathematisk behandlede (af *Puissant* haves blandt andet en ret tilfredsstillende Udvikling af deres Egenskaber), saa er det mig dog ikke bekjendt, at der nogetsteds er fremkommet væsentlige Bidrag til en almindelig Theorie af den tilsvarende Projectionsmaade. *Lambert* berörer den temmeligt kort og indskrænker sig forövrigt til Betragtningen af nogle særegne Tilfælde. I de fölgende Arbeider forbigaaes den næsten ganske, og det er först i den allersidste Tid, at Problemet paany er bragt paa Bane. I Septemberheftet for 1852 af *Liouville's* Journal findes nemlig en Afhandling af *Ossian Bonnet*, som vel atter, under den almindelige Titel: „Sur la théorie mathematique des cartes géographiques," kun giver Lösningen af den sædvanlige og altsaa ofte behandlede Opgave, men Forfatteren har dog her i en Slutningsanmærkning berört det anförte Problem og givet en partiel Differentialligning, hvoraf Lösningen kan udledes, idet han tillige har forbeholdt sig, ved en anden Leilighed at ville forsöge paa en videre gaaende Udvikling. Da jeg for længere Tid siden, ved at beskjæftige mig med et mere omfattende Arbeide over Kaartprojectionerne i Almindelighed, er bleven ledet til nöiere at undersöge den omhandlede Klasse af Afbildninger, skal jeg tillade mig at meddele en Udsigt over Gangen i denne Undersögelse og de derved vundne Resultater. Det Fölgende er et Udtog af det herhen hörende Afsnit i den nævnte, for flere Aar siden nedskrevne Afhandling.

§ 1.

Et Punkts Sted paa en given Overflade kan paa utallige Maader bestemmes ved Hjælp af 2 Variable. En hvilkensomhelst Overförelse af samtlige Punkter fra en given Overflade til en anden ligeledes given Overflade vil derfor stedse kunne tænkes bestemt ved 2 Ligninger mellem 4 Variable, hvoraf de to tjene til Fastlæggelsen af Punkterne paa den ene Overflade, medens de to andre paa lignende Maade bestemme de tilsvarende Punkter paa den anden Overflade. Naar disse to Ligninger ere givne, vil Overförelsesmaaden eller Projectionen være fuldstændigt defineret. Skal omvendt Projectionen være i Besiddelse af visse Egenskaber, maae Ligningerne underkastes visse tilsvarende Betingelser, som det i hvert givet Tilfælde maa være muligt nærmere at eftervise.

Naar den oprindelige Overflade er sphærisk eller sphæroidisk, ville Punkterne være bestemte paa den simpleste Maade ved Angivelsen af deres Længde, θ, og Brede, λ, som her stedse skulle forudsættes udtrykte i Buelængde paa Cirkelen, hvis Radius er Eenheden. Er det endvidere en plan Flade paa hvilken Projectionen skal foregaae, saa kan man fastlægge Punkterne paa denne ved Abscisser, x, og Ordinater, y, henförte til et vilkaarligt valgt retvinklet Coordinatsystem. En bestemt Projection eller Afbildning af den sphæriske eller sphæroidiske Flade paa en Plan vil altsaa stedse kunne defineres ved Ligningerne:

$$x = \varphi\ (\lambda,\ \theta)$$
$$y = \psi\ (\lambda,\ \theta)$$

hvor det nu vil være at vise, hvorledes Functionerne φ og ψ maae bestemmes, for at Billedet i alle dets Dele kan gjengive det afbildede Fladeindhold med uforandret Störrelse.

§ 2.

Den foreliggende Opgave vil ved en meget simpel Bemærkning kunne föres tilbage paa en anden og forholdsviis lettere. Det er nemlig indlysende, at naar man blot blandt de utallige Afbildninger, der opfylde den stillede Betingelse, kjendte een eneste, saa vilde alle de övrige kunne betragtes som plane Forvandlinger af denne. Men af saadanne Afbildninger haves nu flere, hvoraf de bekjendteste ere den oprindelige flamstedske og den saakaldte modificerede flamstedske. Imidlertid ville vi dog ikke her anvende nogen af disse, men foretrække en tredie, der dannes med stor Lethed og fremfor de nævnte besidder den fordeelagtige Egenskab, at samtlige Meridianer og Paralleller gjengives ved Systemer af rette Linier, der respective ere parallelle med Ordinataxen og Abscisseaxen.

Sættes nemlig: $x = a\theta$,

idet a betegner Æquatorradien, saa ville samtlige Meridianer være afbildede ved Linier parallelle med Ordinataxen, og det kommer nu kun an paa at bestemme y saaledes som Function af Breden, at Arealerne bevares uforandrede. Men paa Afbildningen gjengiver aabenbart det uendeltgt lille rectangulære Areal $dxdy$ det paa den krumme Overflade mellem θ og $\theta + d\theta$ og mellem λ og $\lambda + d\lambda$ liggende Fladeelement, hvilket er udtrykt ved $r\varrho d\theta d\lambda$, naar r og ϱ betegne Radius for Parallelkredsen og Krumningsradius for Meridianen, begge svarende til Breden λ.

Man maa fölgelig have Ligningen:

$$dxdy = r\varrho d\theta d\lambda,$$

eller, naar $dx = ad\theta$ elimineres:

$$dy = \frac{r\varrho}{a}\, d\lambda.$$

Ligningerne:

$$\left\{\begin{aligned} x &= a\theta \\ y &= \int_0^\lambda \frac{r\varrho}{a}\, d\lambda \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

bestemme saaledes den sögte Projection, der ogsaa give Parallelkredsene som rette Linier parallelle med Abscisseaxen.

For den sphæriske Flade haves: $r = a\cos\lambda$ og $\varrho = a$, altsaa $y = a\sin\lambda$, hvilket giver den bekjendte Forbindelse mellem Overfladerne af Kuglen og dens omskrevne Cylinder. For den sphæroidiske Flade med Excentriciteten e har man som bekjendt: $r\varrho = \dfrac{a^2\cos\lambda}{(1 - e^2\sin^2\lambda)^2}$, og det indsees let, at man for enhver Omdreiningsflade, hvis Meridian er given, paa lignende Maade kan udtrykke Produktet $r\varrho$ som Function af λ. Den ved Ligningerne (1) bestemte Projection kan derfor anvendes ved hvilkesomhelst givne Omdreiningsflader, og man kan saaledes ogsaa betragte Alt det Fölgende som gjældende for disse Flader i Almindelighed.

§ 3.

Alle de sögte Afbildninger ville nu kunne tænkes frembragte ved paany at projicere det ved Ligningerne (1) bestemte Billede paa en anden Plan, saaledes at Arealerne atter gjengives uforandrede. Udtrykkes Punkterne paa denne sidste Plan, som i det Fölgende udelukkende gives Navn af Projectionsplanen, ved Abscisser: X, og Ordinater: Y, i et retvinklet Coordinatsystem, saa kan enhver saadan Overförelse defineres ved Ligningerne:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi\,(X,\ Y) \\ y &= \psi\,(X,\ Y) \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

eller ved det dermed æquivalente System:

$$\left.\begin{aligned} X &= f\,(x,\,y) \\ Y &= F\,(x,\,y) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Det er indlysende, at det ene af disse Systemer stedse kan tænkes udledet af det andet, og det er forsaavidt ligegyldigt om man gjör Brug af (2) eller (3). Det sidste vil være det beqvemmeste, hvor der er Tale om at bestemme Projectionerne af den oprindelige Plans enkelte Punkter, det förste derimod, hvor man önsker directe at bestemme de Curver, der paa Projectionen afbilde vtsse givne Curver paa den oprindelige Plan. Af denne Grund skal her Systemet (2) fortrinviis anvendes.

§ 4.

Betegnes de ved Differentiationen af (2) erholdte Ligninger paa fölgende Maade:

$$\left.\begin{aligned} dx &= MdX + NdY \\ dy &= mdX + ndy \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

saa vil man let kunne finde det Fladeelement paa den oprindelige Plan, der afbildes ved Rectangelet $dXdY$, hvis fire Hjörner ere bestemte ved Coordinaterne:

$$X,\ Y;\ X,\ Y + dY;\ X + dX,\ Y;\ X + dX,\ Y + dY.$$

Til disse Hjörner svare nemlig paa den oprindelige Plan Punkterne:

$$x,\ y;\ x + NdY,\ y + ndY;\ x + MdX,\ y + mdX;$$
$$x + MdX + NdY,\ y + mdX + ndY.$$

Fladeelementet er saaledes paa denne Plan et Parallellogram og dets Störrelse findes uden Vanskelighed at være:

$$\pm \{Mn - Nm\}\ dXdY.$$

Skulle nu begge Elementers Arealer være numerisk ligestore maa man fyldestgjöre Betingelsen:

$$Mn - Nm = \pm 1,$$

hvor man dog uden Skade for Lösningens Almindelighed kan indskrænke sig til eet af Tegnene, da Forvandlingen af Tegn kan opfattes som svarende til en simpel Dreining af hele Planen om den i samme liggende Abscisseaxe. Valget af φ og ψ er derfar kun knyttet til Opfyldelsen af Ligningen:

$$Mn - Nm = 1, \qquad (5)$$

og det sees saaledes, at den ene af disse Functioner kan vælges fuldkommen vilkaarligt, medens den anden da i hvert Tilfælde bliver bestemt ved en partiel Differentialligning af en yderst simpel Form.

§ 5.

Skulle samtlige Meridianer, som paa den oprindelige Plan ere bestemte ved Ligningen: $x = c$, afbildes paa Projectionsplanen ved Curver af en given Art, indeholdte i Ligningen: $u = f\,(X, Y) = a$, hvor a er den arbitrære Constante, saa maa man aabenbart have:

$$x = \varphi\,(u). \qquad (6)$$

Functionsformen φ er fuldkommen vilkaarlig saalænge det ikke er fastsat, hvorledes hver enkelt af de oprindelige Meridianer svarer til hver enkelt af de givne Curver. Har man derimod fastsat dette, eller, med andre Ord, har man givet c som en bestemt Function af a, saa er derved ogsaa med det samme Functionen φ bestemt. Af (6) fölger nu: $M = \varphi'(u)\dfrac{du}{dX}$ og $N = \varphi'(u)\dfrac{du}{dY}$. Da disse Störrelser maae betragtes som bekjendte Udtryk i X og Y, bliver Integrationen af den partielle Differentialtegning (5) fört tilbage paa Integrationen af hvilkesomhelst to Differentialligninger i Systemet:

$$MdX + NdY = 0;\ Mdy + dX = 0;\ Mdy - dY = 0;$$

hvoraf den förstes Integral er: $\varphi\,(u) = c$. Man har altsaa ganske almindeligt, idet F betegner en arbitrær Functionsform:

$$\left.\begin{array}{l} y = \psi(X, Y) = \dfrac{1}{\varphi'(u)} \displaystyle\int \dfrac{dY}{\left(\frac{du}{dX}\right)} + F(u) = \\ \qquad - \dfrac{1}{\varphi'(u)} \displaystyle\int \dfrac{dX}{\left(\frac{du}{dY}\right)} + F(u), \end{array}\right\} \quad (7)$$

hvor den ene af de to Variable X og Y, der sædvanligt begge indtræde saavel i $\frac{du}{dX}$ som i $\frac{du}{dY}$, för Integrationen elimineres ved Hjælp af Ligningen $\varphi(u) = c$, eller $u = a$, idet den arbibitrære Constante atter bortskaffes ved samme Ligning, naar Integrationen er fuldbyrdet.

Vilde man have en lignende almindelig Lösning af Problemet under den Forudsætning, at det var Parallelkredsene, der skulde afbildes ved Curver af en bestemt Art, indeholdte i Ligningen $u = a$, saa er denne Lösning ligefrem givet ved det Foregaaende og kan fremstilles ved en simpel Ombytning af Bogstaverne i de udviklede Formler.

Man faaer i dette Tilfælde, istedetfor Formlerne (6) og (7), de efterfölgende:

$$\left.\begin{array}{c} y = \psi(u) \\ x = \dfrac{1}{\psi'(u)} \displaystyle\int \dfrac{dX}{\left(\frac{du}{dY}\right)} + F(u) = - \dfrac{1}{\psi'(u)} \displaystyle\int \dfrac{dY}{\left(\frac{du}{dX}\right)} + F(u) \end{array}\right\} \quad (8)$$

§ 6.

Rigtigheden af de ved Formlerne (6), (7) og (8) givne Lösninger af Problemet hviler imidlertid paa en Slutning, som fortjener en noget nærmere Undersögelse.

Da Ligningen (5) er fyldestgjort vil der vel i alle Tilfælde finde en fuldkommen Ligestorhed Sted mellem de mindste Dele af Billedet og det Afbildede, men heraf fölger dog ikke med Nödvendighed, at Ligestorheden stedse bevares for hvilkesomhelst endelige Fladeindhold. Ere de valgte Functioner for alle Værdier reelle og eenformede, det vil sige, er Projectionen saaledes bestemt, at der stedse til hvert distinct Punkt paa den förste Plan svarer eet distinct Punct paa den anden og omvendt, saa gjælder Slutningen uden nogensomhelst Indskrænkning, og hvert endeligt paa en hvilkensomhelst Maade begrændset Areal paa den ene Plan vil da gjengives paa den anden ved et nöiagtigt ligestort Areal, hvis Begrændsning selv er dannet ved Overförelsen af det förste Areals Begrændsning. Naar een eller flere af de i (2) og (3) indtrædende Functioner φ, ψ, f og F ere fleerformede, eller imaginære udenfor givne Grændser, fremkomme derimod visse Undtagelser, hvoraf her kun de væsentligste skulle beröres:

1) Ere Functionerne saaledes bestemte, at der til hvert givet Punkt paa den oprindelige Plan svarer flere distincte Punkter paa Projectionsplanen, medens der omvendt til hvert Punkt paa denne kun svarer eet Punkt paa den förste, saa vil man have en fleerfoldig Afbildning, hvor hvert forelagt Areal gjengives ved to, eller flere forskjellige Billeder. Imidlertid vil dog hvert af disse Billeder for sig betragtet fyldestgjöre den stillede Betingelse, saa at der egentlig ikke i dette Tilfælde foreligger nogen Undtagelse.

2) Have derimod flere forskjellige Punkter een og samme Projection og indeholder det projicerede Areal saadanne Punkter, saa er det aabenbart, at Regelen maa lide en virkelig Undtagelse, idet man for at gjenfinde Ligestorheden maa regne Arealet paa de tilsvarende Dele af Projectionsplanen dobbelt eller fleerdobbelt.

3) Ved samme Projection kan en Combination af de under 1 og 2 angivne Forhold finde Sted, og der vil altsaa ved en speciel Discussion af hvert herhen hörende Tilfælde være samtidigt at tage Hensyn til de ovenanförte Undtagelser.

4) Endelig vil der i mangfoldige Tilfælde være visse Dele af Planerne, der slet ikke kunne overföres, idet de tilsvarende Projectioner blive imaginære. Hvor saadanne Forhold indtræde, maa man drage Omsorg for, at hele det Areal, der skal afbildes, ligger paa den Deel af Planen, som projiceres reelt.

§ 7.

Uagtet der ikke i nærværende Oversigt kan være Tale om at gjennemgaae de forskjellige mærkelige Projectioner, som fremstaae ved en speciel Anvendelse af de udviklede Formler, saa turde det dog være passende ganske kort at beröre et Par enkelte Tilfælde, især for derved at erholde Leilighed til at belyse de i foregaaende Paragraph fremsatte Bemærkninger.

Den simpleste af alle her behandlede Afbildninger vil fremkomme, naar man tillægger Functionen u den simpleste af alle mulige Former ved ligefrem at sætte $u = X$, eller $x = \varphi(X)$. Meridianerne vedblive da ogsaa i Billedet at være rette Linier parallelle med Ordinataxen, og hele Omdannelsen bestaaer egentligt kun deri, at de enkelte rectangulære Fladeelementer: ydx gjenvinde ved en forögет Længdeudstrækning, hvad de tabe ved at gjöres smallere efter en vilkaarlig given Lov. Projectionen har vel i og for sig ingen Interesse, men den egner sig ikke destomindre just til Anförelse paa dette Sted, da alle Udryk reduceres saaledes, at deres Rigtighed med störste Lethed directe kan eftervises og som oftest endogsaa af sig selv falder i Öinene.

Antagelsen: $u = X$, giver ved Formlerne (6) og (7) fölgende Bestemmelser for x og y:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(X) \\ y &= \frac{Y}{\varphi'(X)} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

idet vi til end yderligere Simplification udelade den arbitrære Function af X.

Satte man nu atter i (9): $\varphi(X) = X$, saa vilde Billedet blive identisk med det Afbildede. Antager man derimod $\varphi(X) = X^3$, eller, for at bevare Homogeniteten, $= \frac{X^3}{b^2}$, erholdes fölgende Udtryk:

$$x = \frac{X^3}{b^2};\; y = \frac{Y b^2}{3X^2},\text{ samt } X = (b^2 x)^{\frac{1}{3}};\; Y = 3y\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Da alle Functioner ere reelle og eenformede, har man her en Afbildning af den almindelige Art, hvor ethvert Areal uden nogensomhelst Undtagelse overföres med samme Störrelse, saavel fra den förste Plan til den anden, som fra denne til hiin. Cirkelfladen, begrændset af Cirkelen: $y^2 + x^2 = r^2$, bliver saaledes afbildet ved det æqvivalente Areal, som begrændses af Curven: $Y = \pm \frac{3X^2}{b^4} \sqrt{r^2 b^4 - X^6}$, der har Form af et liggende Ottetal, dog med den Forandring, at Grenene i Begyndelsespunktet ikke skjære, men beröre Abscisseaxen. Omvendt svarer igjen til Cirkelen: $Y^2 + X^2 = r^2$, en Curve paa den förste Plan, hvis Ligning er: $3y\left(\frac{x}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \pm\sqrt{r^2 - b(bx^2)^{\frac{1}{3}}}$, og denne Curve omslutter paany det samme Areal, uagtet dens Form atter er meget forskjellig, da den nu har fire Grene, der strække sig i det Uendelige med Ordinataxen som fælleds Asymptote.

Sættes $\varphi(X) = \frac{X^2}{b}$, faaer man Udtrykkene:

$$x = \frac{X^2}{b};\; y = \frac{bY}{2X};\; X = \pm\sqrt{bx};\; Y = \pm\, 2y\sqrt{\frac{x}{b}}$$

Denne Projection afgiver Exempel paa de under 1 og 4 nævnte Undtagelser. Man seer nemlig let, at hvert Punkt i den förste Plan afbildes ved to Punkter, eet tilhöire og eet tilvenstre af Y Axen, naar dets Abscisse er positiv, medens det kun har imaginære Projectioner, naar Abscissen er negativ. De Arealer, der skulle projiceres, maa altsaa ligge heelt paa höire Side af Ordinataxen og blive da gjengivne ved to æquivalente Billeder, det ene liggende paa höire, det andet paa venstre Side af Projectionsplanens Ordinataxe. Specielt kan man dog bemærke, at alle Curver, der paa den oprindelige Plan ere symmetriske med Hensyn til y Axen, projiceres uden Forandring af det omsluttede Areal; thi vel er det kun det Halve af Arealet, der har reel Projection, men da denne til Gjengjæld er dobbelt, bliver Ligestorheden herved frembragt paany. Tager man saaledes

Cirkelen, hvis Ligning er: $y^2 + x^2 = r^2$, saa afbildes denne ved Curven: $b^4 Y^2 + 4X^6 = 4r^2 b^2 X^2$, der er dannet som et liggende Ottetal. Denne Curves Fladeindhold er ligestort med Cirkelens, af hvilken dog kun den höire Halvpart er dobbelt projiceret paa begge Sider af Axen. Tilbageförelsen af hvilkesomhelst Arealer fra Projectionsplanen til den oprindelige Plan giver et Erempel paa den under 2 berörte Undtagelse. To og to Punkter, det ene tilhöire, det andet tilvenste af Y Axen, gjengives nemlig her ved eet og samme Punkt. Arealer, som ligge paa begge Sider af Axen blive derfor overförte med forringet Störrelse, og er det forelagte Areal netop symmetrisk halveret af begge Axer, bliver det overförte nöiagtigt Halvdelen deraf. Til Cirkelen: $Y^2 + X^2 = r^2$, svarer saaledes Curven: $x\ (4y^2 + b^2) = br^2$, der har to uendelige Grene, som i Forbindelse med den fælleds Asymptote (y-Axen) omslutte Arealet $\frac{1}{2}r^2\pi$. Derimod er det indlysende, at Arealet gjengives uforandret, naar det ligger heelt paa den ene Side af Y-Axen. Cirkelen: $Y^2 = 2rX - X^2$, frembringer saaledes Curven: $x\ (4y^2 + b^2)^2 = 4r^2 b^3$, som ganske ligner den foregaaende, men nu omslutter Arealet $r^2\pi$. Betragter man nærmere Overförelsen af den tidligere anförte Curve: $b^4 Y^2 + 4X^6 = 4r^2 b^2 X^2$, vil man iövrigt let see, hvorledes og hvorfor selv disse Bemærkninger undertiden kunne taale at modificeres.

Vil man danne Exempler, hvor ogsaa den under 3 nævnte Undtagelse forekommer, saa maa Functionen φ selv antages fleerformet. For $\varphi\ (X) = \pm \sqrt{b^2 - X^2}$ erholder man saaledes en Projection bestemt ved:

$$x = \pm \sqrt{b^2 - X^2};\ y = \mp \frac{Y}{X}\sqrt{b^2 - X^2};\ X = \pm \sqrt{b^2 - x^2};$$

$$Y = \mp \frac{y}{x}\sqrt{b^2 - x^2},$$

hvis Hovedegenskaber ere iöinefaldende. Kun de Punkter, som ligge indenfor Parallellerne: $x = \pm b$, have reelle Projectioner, idet tillige to og to af disse Punkter, eet tilhöire og eet tilvenstre af y-Axen, gjengives ved de samme tvende Punkter, hvoraf eet ligger tilhöire og eet tilvenstre af Y-Axen. Medens Arealer, der ligge udenfor de betegnede Grændser, slet ikke projiceres, afbildes derimod alle Arealer, der ere heelt beliggende mellem $x = 0$ og $x = + b$, eller mellem $x = 0$ og $x = - b$, ved tvende æquivalente Billeder, og saadanne Arealer, der ligge paa begge Sider af y-Axen, ved Billeder, hvis totale Fladeindhold er mindre end det Dobbelte. Specielt kan det endnu bemærkes, at Figurer, der ligge indenfor Grændserne og ere symmetrisk deelte af begge Axer, atter her af en let begribelig Grund gjengives med uforandret Fladeindhold. Cirkelen: $y^2 = bx - x^2$, projiceres saaledes ved Curven: $X^6 = (b^2 - X^2)(Y^4 + 2Y^2 X^2)$, hvis Fladeindhold, indesluttet mellem de fire hyperbolske Grene og de to fælles Asymptoter: $x = \pm b$, er $= \frac{1}{2} b^2 \pi$, medens Cirkelen: $y^2 + x^2 = b^2$, gjengives ved Curven: $Y = \frac{X^2}{\pm\sqrt{b^2 - X^2}}$, hvis Areal, bestemt paa lignende Maade, kun findes $= b^2 \pi$.

§ 8.

Næst efter Meridianernes Afbildning ved et System af parallelle rette Linier, vilde det Tilfælde være at betragte som det simpleste, hvor Meridianerne gjengaves ved et System af rette Linier, gaaende gjennem et givet Punkt. Da dette Punkt stedse kan tages til Begyndelsespunkt for Projectionsplanen, har man her: $u = \frac{Y}{X}$, og altsaa, ifölge (6) og (7):

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi\left(\frac{Y}{X}\right) \\ y &= -\frac{X^2}{2\varphi'\left(\frac{Y}{X}\right)} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

idet den arbitrære Function af u er udeladt.

Med Forbigaaelse af alle de övrige ved (10) bestemte mærkelige Afbildninger, skal her blot fremhæves een Anvendelse af Formlerne. Sættes nemlig $x = \varphi\left(\frac{Y}{X}\right) = b.\text{arc.}\left(\text{tang} = \frac{Y}{X}\right)$, altsaa $y = \frac{Y^2 + X^2}{2b}$, og udtrykkes Punkterne i Projectionsplanen ved Polarcoordinaterne r og θ, idet man tillige sætter $-y$ for $+y$, eller, hvad der er det samme, tænker sig den forelagte Plan dreiet om Abscisseaxen, saa erholdes följende Forbindelse mellem x, y, r og θ:

$$x = b\theta;\ y = \frac{r^2}{2b};\ \theta = \frac{x}{b};\ r = \pm\sqrt{2yb} \tag{11}$$

der viser, hvorledes man paa simpleste Maade forvandler et sædvanligt Curveareal i det retvinklede Coordinatsystem til et Curveareal i det polare System og omvendt. Ved denne Forvandling reduceres hele x-Axen til Polarsystemets Pol, y-Axen tll dets faste Axe og samtlige Ordinater til radii vectores. Ethvert forelagt Areal, der paa sædvanlig Maade begrændses af en given Curve: $y = f(x)$, Abscisseaxen og to Ordinater, bestemte ved $x = a_1$ og $x = a_2$, gjengives paa Projectionsplanen ved et æquivalent Areal, indesluttet mellem Curven: $r^2 = 2bf(b\theta)$, og de radii vectores, der svare til $\theta = \frac{a_1}{b}$ og $\theta = \frac{a_2}{b}$. Udtrykkene for θ og r give paa lignende Maade den simpleste Forvandling af et forelagt polart Areal til et aædvanligt Curveareal. Den archimediske Spiral: $r = \frac{c}{2\pi}\theta$, forvandles saaledes til den almindelige Parabel: $y = \frac{c^2}{8b^3\pi}x^2$, og da dennes Areal, regnet fra $x = o$, er udtrykt ved $\frac{1}{3}yx$, maa ogsaa Spiralens Fladeindhold, regnet fra $\theta = o$, være bestemt ved $\frac{1}{6}r^2\theta = \frac{1}{3}\frac{r^3\pi}{c}$. Iövrigt sees det let, at kun de Arealer, som paa den forelagte Plan ligge over Abscisseaxen, afbildes reelt, idet Billedet tillige er dobbelt, da man for hvert θ har saavel en negativ som en positiv Værdie af r. Arealer, der ere symmetrisk deelte af Abscisseaxen, kunne af denne Grund betragtes som projicerede med uforandret Störrelse, og Cirkelen: $y^2 + x^2 = R^2$, frembringer derfor en Curve: $r^4 = 4b^2 (R^2 - b^2\theta^2)$, hvis totale Fladeindhold bliver $= R^2\pi$. Uagtet Formlerne (11) ere saa simple, at de synes umiddelbart at maatte paatrænge sig Enhver ved den flygtigste Betragtning af Fladeindholds Differentialerne: ydx og $\frac{1}{2}r^2d\theta$, saa mindes jeg dog ikke nogetsteds at have seet dem anförte. Man vilde naturligviis kunne finde utallige andre og mere sammensatte Forvandlingsformler ved at tillægge Functionen φ en mere forviklet Form end den her benyttede.

Den sidst berörte specielle Projection giver Parallelkredsene som concentriske Cirkler. Vilde man overhovedet bestemme alle de Projectioner, der besidde denne Egenskab, saa löses dette Problem ved at benytte Formlerne (8), hvor u da kan sættes $= X^2 + Y^2$. Man faaer herved:

$$y = \psi\,(X^2 + Y^2)$$

$$x = \frac{1}{\psi'(X^2 + Y^2)} \int \frac{dX}{2Y}$$

$$= \frac{1}{2\psi'(X^2+Y^2)} \cdot \text{arc}\left(\sin = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2}}\right) + F(X^2+Y^2),$$

eller med Udeladelse af den arbitrære Function og med Indförelse af r og θ:

$$y = \psi(r^2); \quad x = \frac{-\theta}{2\,\psi'(r^2)},$$

hvoraf (11) er et specielt Tilfælde.